PREZENTACJA PT:

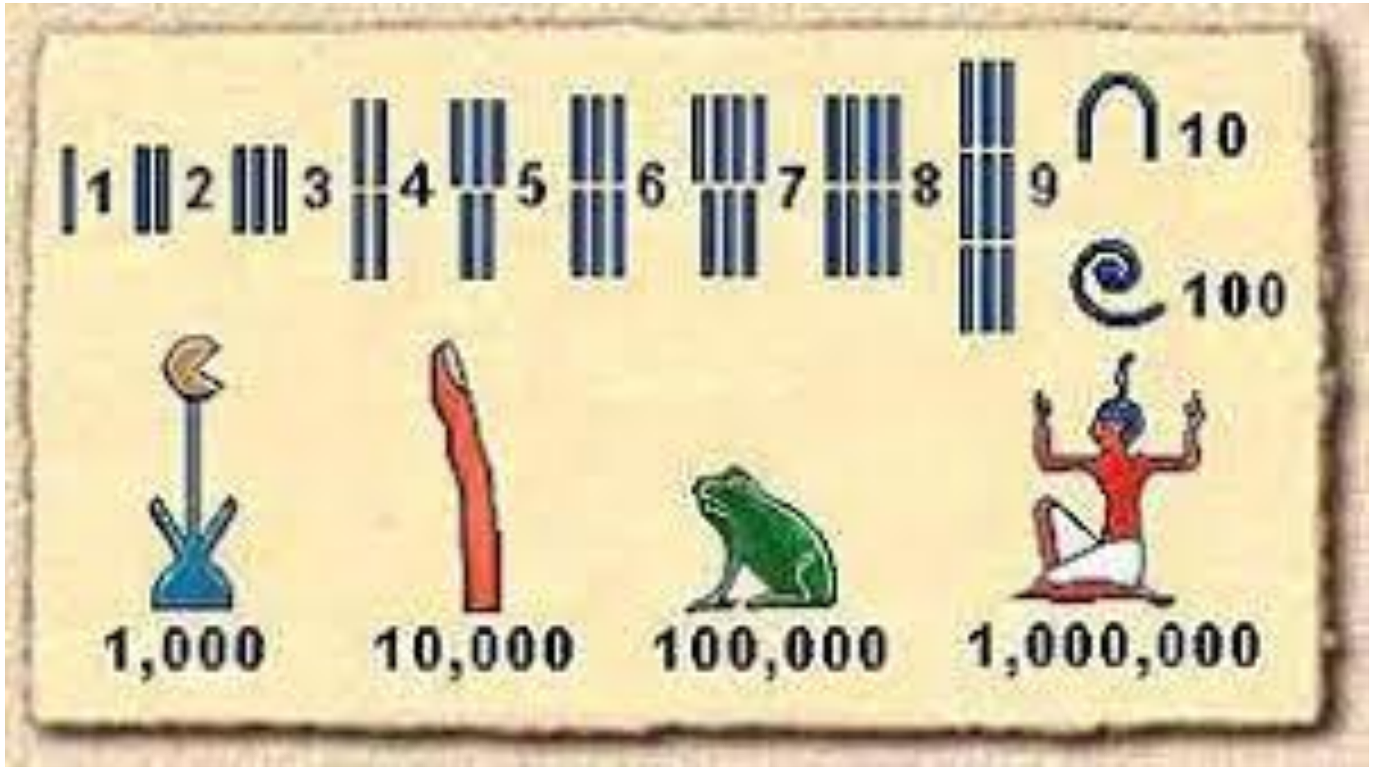
HISTORIA LICZB

CO TO LICZBA???

- **Liczba** – pojęcie abstrakcyjne, jedno z najczęściej używanych w matematyce. ... W matematyce określenie „**liczba**” bez żadnego przymiotnika jest nieścisłe, gdyż matematycy nie definiują „liczb”, lecz „**liczby** naturalne”, „**liczby** całkowite” itp.

STAROŻYTNE CYFRY EGIPSKIE

- były używane w Egipcie aż do wczesnych lat pierwszego tysiąclecia naszej ery. Był to system dziesiętny, często zaokrąglany w górę, zapisywany przy użyciu hieroglifów. System zapisu przez hieratykę wymuszał skończony zapis liczb.



DODAWANIE I ODEJMOWANIE W STAROŻYTNYM EGIPCIE

- Jako plus i minus używano hieroglifów:

- Jeśli stopy skierowane były zgodnie z kierunkiem pisania, to oznaczało dodawanie, w przeciwnym razie odejmowanie

SYSTEM RZYMSKI

- Pierwotny rzymski system zapisywania liczb był prosty, ale dość niewygodny. Rzymianie zapisywali liczby za pomocą tylko pionowych kresek, na kształt systemu karbowego. Wprowadzono więc dla oznaczenia ważnych liczb dodatkowe znaki.

- Rzymski sposób zapisywania liczb jest sposobem addytywnym, czyli wartość danej liczby określa się na podstawie sumy wartości jej znaków cyfrowych. Wyjątki od tej zasady to liczby: 4, 9, 40, 90, 400 i 900, do opisu których używa się odejmowania. Podczas zapisywania liczb w systemie rzymskim należy dążyć zawsze do tego, aby używać jak najmniejszej liczby znaków, pamiętając przy tym o zasadach:

- 1. Obok siebie mogą stać co najwyżej trzy znaki spośród: I, X, C lub M.
  2. Obok siebie nie mogą stać dwa znaki: V, L, D.
  3. Nie może być dwóch znaków oznaczających liczby mniejsze bezpośrednio przed znakiem oznaczającym liczbę większą.
  4. Znakami poprzedzającymi znak oznaczający większą liczbę mogą być tylko znaki: I, X, C.

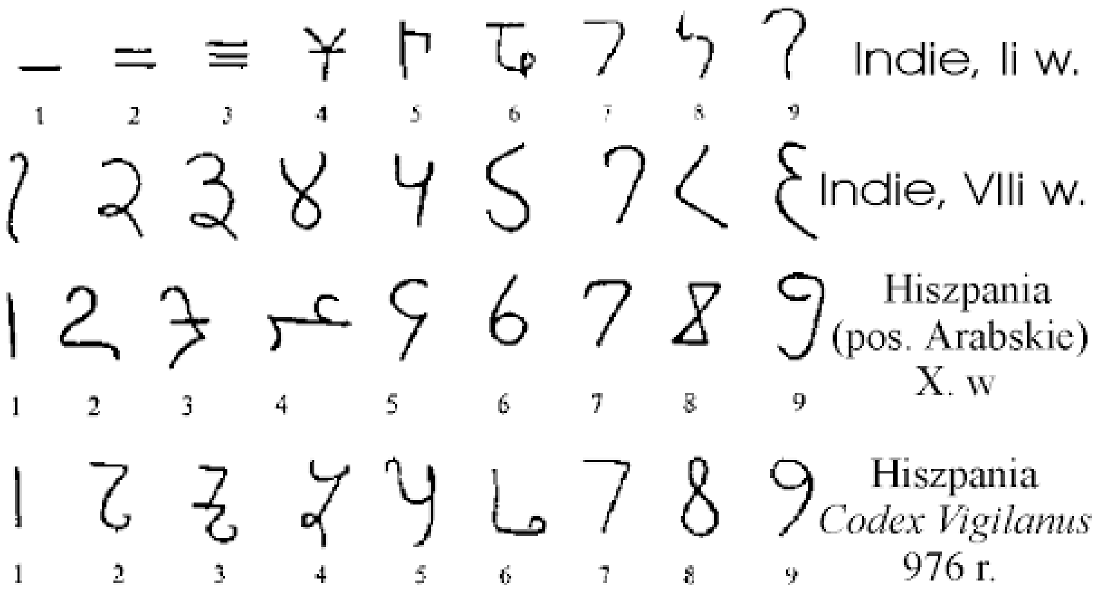
OZNAKOWANIE W SYSTEMIE RZYMSKIM

- W systemie rzymskim posługujemy się znakami: I, V, X, L, C, D, M, gdzie:
I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

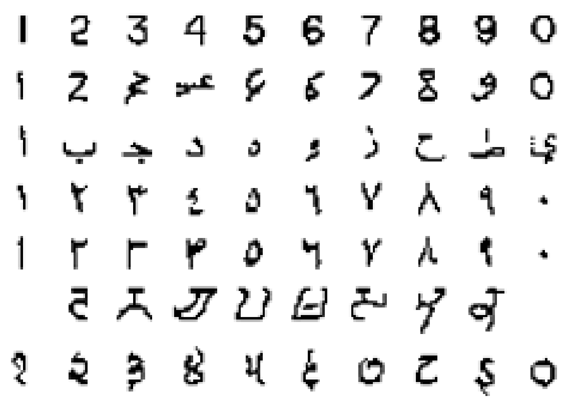
CYFRY ARABSKIE

- Jakkolwiek mianem *cyfr arabskich* określa się obecnie używany powszechnie niemal na całym świecie zestaw symboli stosowanych do oznaczenia poszczególnych wartości liczbowych, to w rzeczywistości używane w większości krajów arabskich (i muzułmańskich) cyfry arabskie nie przypominają swych europejskich odpowiedników. Różnica ta wynika stąd, iż wygląd zapożyczonych w średniowieczu przez kulturę europejską symboli ewoluował w innym kierunku, niż wygląd tych samych znaków w kulturze islamu, przy czym cyfry w krajach arabskich bliższe są swoim indyjskim pierwowzorom.



- Obecnie istnieją dwie wersje cyfr arabskich, różniące się wyglądem kilku cyfr:
- tzw. cyfry **indyjsko-arabskie** – stosowane obecnie w krajach arabskojęzycznych (np. Egipt, Algieria) oraz Afganistanie; przed 1928 r. w. używane także w Turcji.
- tzw. **cyfry wschodnio-indyjsko-arabskie** (lub **wschodnioarabskie**) – stosowane w innych krajach islamskich, w których niearabski język urzędowy zapisywany jest przy pomocy pisma arabskiego w (Iranie, Pakistanie oraz w Indiach – w przypadku liczb stosowanych wraz z językiem urdu).

- Bardziej znana jest wersja pierwsza, jakkolwiek liczba użytkowników obu systemów liczbowych jest zbliżona (po ok. 200–300 mln).
- Używane niekiedy nazwy: *cyfry indyjsko-arabskie* czy *cyfry wschodnio-indyjsko-arabskie* nie odnoszą się do stosowania tych cyfr na terenie Indii (choć są używane przez kilkadziesiąt milionów muzułmanów w płn.-zach. części kraju), ale podkreślają, że chodzi o inny zestaw cyfr, niż te, które nazywane są potocznie arabskimi. Przymiotnik *indyjskie* podkreśla różnicę w stosunku do *europejskich* cyfr arabskich, wskazuje też na podobieństwo wyglądu tych cyfr do oryginalnych indyjskich znaków liczbowych.
- Zwykle w krajach używających „oryginalnych” cyfr arabskich stosowane są – czasem pomocniczo, a czasem równolegle – *europejskie* cyfry arabskie. W niektórych krajach arabskich (np. Tunezja) istnieje zjawisko wypierania cyfr arabskich w wersji *arabskiej* przez cyfry *europejskie*.



LICZBY NATURALNE

Uważa się, że po raz pierwszy liczb zaczęto używać ok. 30 000 lat p.n.e. Z tego okresu pochodzą kości i inne artefakty, na których znaleziono ślady nacięć, uważane za próbę liczenia. Nie wiadomo, czy zliczano dobra, dni, czy może np. ludzi w konkurencyjnej grupie. Najstarszy znany przykład malowidła z kreskami, sugerującymi liczenie, pochodzi z jaskini w południowej Afryce.

Taki system zapisu liczb nie nadaje się do zapisu dużych liczb. Pierwszy znany pozycyjny system zapisu liczb pochodzi ze starożytnej Mezopotamii (ok. 3400 p.n.e.), i bazuje na liczbie 60. Najstarszy dziesiątkowy system pozycyjny pochodzi z Egiptu (ok. 3100 p.n.e.).

W XIX wieku Russell zdefiniował po raz pierwszy ściśle liczby naturalne jako moce zbiorów skończonych. Peano w 1889 zaksjomatyzował liczby naturalne. Na początku XX wieku von Neumann stworzył swoją konstrukcję liczb naturalnych.

DZIEJE ZERA

- Użycie zera jako liczby powinno zostać odróżnione od użycia jako cyfry. Wiele starożytnych indyjskich tekstów używało sanskryckiego słowa *shunya* w znaczeniu pustki. W tekstach matematycznych używano go jako liczbę zero. W podobny sposób hinduski gramatyk Panini (V wiek p.n.e.) używał zera w dziele Ashtadhyayi, jego formalnej gramatyce sanskrytu.
- Zapiski pokazują, że starożytni Grecy nie byli pewni co do statusu zera jako liczby: pytali „jak nic może być czymś?", co doprowadziło do interesujących filozoficznych argumentów na temat natury i istnienia zera i próżni. Paradoksy Zenona z Elei w części pochodzą z dwuznacznej interpretacji zera. Starożytni Grecy kwestionowali zresztą także jedynkę jako liczbę.
- Późni Olmekowie w południowo-centralnym Meksyku zaczęli używać prawdziwego zera (znak muszli) prawdopodobnie około IV wieku p.n.e., a na pewno w 40 roku p.n.e., kiedy stało się integralną częścią zapisu liczb u Majów, ale nie miało to wpływu na matematykę europejską.
- Około 130 roku Klaudiusz Ptolemeusz pod wpływem Hipparcha i Babilończyków używał symbolu zera (małego kółka z długą kreską powyżej) w pozycyjnym systemie używającym alfabetu greckiego jako cyfr. Zero było u niego po raz pierwszy w historii Zachodu używane samodzielnie, nie tylko jako cyfra, ale także jako liczba. W późnym bizantyjskim manuskrypcie jego *Syntaxis Mathematica* (*Almagest*), jego znak zera przekształcił się w grecką literę omikron (oznaczającą oryginalnie 70).
- Kolejne prawdziwe zero było używane na tablicach liczebników rzymskich ok. 525, ale jako słowo *nulla* oznaczające *nic*, a nie jako oddzielny symbol. Kiedy dzielenie dawało resztę zero, używano słowa *nihil*, także oznaczającego *nic*. Te średniowieczne zera były potem używane przez wszystkie średniowieczne algorytmy wyznaczania daty Wielkanocy. W 725 św. Beda Czcigodny używał litery N jako symbolu zera, w czym jednak był osamotniony.
- Wczesne udokumentowane użycie zera przez Brahmaguptę w tekście Brahmasphutasiddhanta datuje się na rok 628. Używał on zera jako liczby i rozważał działania na nim, włącznie z dzieleniem przez nie. W tym czasie (VII wiek) idea zera dotarła do Kambodży, a później do Chin i świata islamskiego.
- Do Europy hinduski system zapisu liczb dotarł w XI wieku za pośrednictwem hiszpańskich Maurów, stąd jego cyfry zostały nazwane cyframi arabskimi. Fibonacci używał w XIII wieku zera, ale tylko jako cyfry. Dopiero w XVII wieku zero było powszechnie rozpoznawane jako liczba w Europie.

LICZBY WYMIERNE

- Prawdopodobnie idea ułamków pojawiła się już w czasach prehistorycznych. Nawet starożytni Egipcjanie pisali teksty matematyczne z użyciem ułamków. Klasyczni Grecy i matematycy indyjscy opracowali teorię liczb wymiernych. Najbardziej znanym przykładem ich użycia są Elementy Euklidesa (ok. 300 p.n.e.). Z tekstów indyjskich najbardziej Koncepcja ułamków jest blisko związana z ich zapisem dziesiętnym. Obydwie idee powstawały równolegle. Na przykład w tekstach indyjskich stosowano zapis dziesiętny ułamków do przybliżonego podawania wartości π, czy pierwiastka z dwóch. Podobnie babilońskie teksty matematyczne często używały ułamków o mianowniku będącym potęgą sześćdziesiątki. Do dziś pozostały ślady tego w przyjmowanym podziale jednego stopnia kątowego na 60 minut kątowych, a następnie 60 sekund oraz w tzw. *systemie kopowym*, z którego pochodzą takie pojęcia jak *kopa* (60 jednostek), *mendel* (15 jednostek – czwarta część kopy), czy *tuzin* (12 jednostek – piąta część kopy).
- W Europie jednak zapis dziesiętny ułamków długo nie był popularny, dopiero w XVII wieku upowszechnił się wśród matematyków.
- godna wzmianki jest Sthananga Sutra.

Historia liczb niewymiernych

- Po raz pierwszy liczby niewymierne użyte zostały w indyjskich tekstach Shulba Sutras, napisanych między 800 a 500 rokiem p.n.e. Pierwszy dowód istnienia liczb niewymiernych jest zwykle przypisywany Hippasusowi z Mezopotamii, pitagorejczykowi, który udowodnił niewymierność pierwiastka z dwóch. Związana jest z tym pewna opowieść, nie wiadomo czy prawdziwa: Pitagoras wierzył w absolutną naturę liczb, i nie potrafił zaakceptować odkrycia swego ucznia. Intelektualnie nie potrafił wprawdzie obalić dowodu, jednak podważało to fundamenty jego wiary, skazał więc Hippasusa na śmierć przez utopienie.

LICZBY ALGEBRAICZNE, PRZESTęPNE I RZECZYWISTE

- Ułamki łańcuchowe, blisko związane z liczbami niewymiernymi, wprowadził Cataldi w 1613, następnie zajmował się nimi Euler, a na początku XIX wieku ich teorię rozwinął Joseph Louis Lagrange. Legendre rozszerzył ten dowód, pokazując że π nie jest pierwiastkiem kwadratowym żadnej liczby wymiernej. Poszukiwanie rozwiązań równań piątego stopnia doprowadziło do dalszego postępu, kiedy okazało się, iż ogólna postać rozwiązania nie daje się zapisać w postaci wzoru z użyciem czterech działań arytmetycznych i pierwiastkowania. (tzw. twierdzenie Abela-Ruffiniego, Ruffini 1799, Abel 1824). W ten sposób wydzielono liczby algebraiczne, będące pierwiastkami wielomianów. Galois (1832) połączył teorię tych równań z utworzoną przez siebie teorią grup. W XIX wieku ściśle zdefiniowano zbiór liczb rzeczywistych. Opublikowano
prace Weierstrassa (1872), Heinego, Cantora i Dedekinda. Metoda Weierstrassa została rozwinięta przez Pincherie (1880), a Dedekinda przez jego własną pracę z 1888 oraz pracę Tannery'ego z 1894. Weierstrass, Cantor, i Heine konstruując liczby rzeczywiste bazowali na szeregach nieskończonych, a Dedekind stworzył
tzw. przekroje nazwane jego nazwiskiem. Idea została rozwinięta przez Weierstrassa, Kroneckera, i Méray.

Liczby, działania i wyrażenia algebraiczne

$$6x-8x=-2x$$
$$3x^2+12x^2=15x^2$$
$$-4x^2\cdot 6x^1=-24x^3$$
$$-2(6-4x+2a)=-12+8x-4a$$
$$5x^2(3x-1)=15x^3-5x^2$$
$$-(x+3)(x-2)=-(x^2-2x+3x-6)=-(x^2+x-6)=-x^2-x+6$$
$$2(x-3)^2=2(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2)=2(x^2-6x+9)=2x^2-12x+18$$
$$2(x-3)\cdot(x-3)=2(x^2-$$

6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb a, b:

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb a, b zachodzi wzór:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+a^{n-k}b^{k-1}+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

W szczególności:

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $\quad a^2-1=(a-1)(a+1)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ $\quad a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $\quad a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$

tablice str3 $\quad a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1)$

LICZBY PIERWSZE

- Liczby pierwsze były badane od czasów starożytnych. Euklides poświęcił im księgę w *Elementach*. Zaprezentował w nich m.in. algorytm znajdowania największego wspólnego dzielnika oraz udowodnił, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
- W 240 p.n.e. Eratostenes użył algorytmu nazwanego sitem Eratostenesa do szybkiego znajdowania liczb pierwszych.
- Dalszy postęp w dziedzinie teorii liczb nastąpił w epoce Renesansu. W 1796 Legendre podał wzór na gęstość rozmieszczenia liczb pierwszych. Wzór został ostatecznie udowodniony przez Hadamarda i de la Vallée-Poussina w 1896. W 1859 Riemann stworzył słynną hipotezę, do dziś nieudowodnioną, dotyczącą pierwiastków funkcji dzeta. Inną dotąd nieudowodnioną hipotezą dotyczącą liczb pierwszych jest hipoteza Goldbacha mówiąca, że dowolną liczbę parzystą większą od 2 można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Wykonał:

FILIP SIWAK